ECOLE DE L'AIR

SECONDE EPREUVE DE MATHEMATIQUES - OPTION M.P. -

Durée : 4 heures

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées 4×4 à cœfficients complexes. On notera I la matrice identité de $\mathcal{M}$, A^k la puissance $k$ième ($k \in \mathbb{N}$) d'une matrice A avec la convention $A^0 = I$.

1) Soit P un polynôme unitaire de degré 4. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ ses racines éventuellement multiples :

$$P(z) = z^4 + \alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z + \alpha_4 = \prod_{i=1}^{4} (z - \lambda_i)$$

On pose $s_0(P) = 4$ et, pour $k \geq 1$, $s_k(P) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^k$

a) Montrer que : $s_1 = -\alpha_1$ et $s_2 + \alpha_1 s_1 = -2\alpha_2$.

b) Calculer de même $s_3 + \alpha_1 s_2 + \alpha_2 s_1$ et $s_4 + \alpha_1 s_3 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_1$

2) Soit $A \in \mathcal{M}$; on note P_A le polynôme caractéristique unitaire de A :

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Justifier que $s_k(P_A) = \mathrm{tr}(A^k)$.

3) On définit une suite de matrices B_n et une suite de complexes p_n par les relations $B_0 = I$ et

$$\forall k > 0 \qquad p_k = -\frac{1}{k}\mathrm{tr}(B_{k-1}A), \quad B_k = B_{k-1}A + p_k I$$

a) Montrer que les p_k permettent de déterminer les cœfficients de P_A.

b) Montrer que B_k est nulle pour $k \geq n$.

c) Si A est inversible, déterminer A^{-1} en utilisant ce qui précède.

d) Montrer l'équivalence entre A est nilpotente et $\forall k \geq 1, \mathrm{tr}(A^k) = 0$.

4) Application : soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la suite des matrices B_n associées, en déduire le polynôme caractéristique de A et la matrice A^{-1}.

5) L'espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ est rapporté à une base $\mathcal{B}$; soit $x \in \mathbb{C}^4$ tel que x, Ax, A^2x, A^3x forment une famille libre. (On ne demande pas de justifier l'existence d'un tel x).

a) Montrer qu'il existe des complexes $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ tels que

$$A^4x = \beta_0 x + \beta_1 Ax + \beta_2 A^2x + \beta_3 A^3x$$

b) On note Q le polynôme $Q(z) = z^4 - \beta_3 z^3 - \beta_2 z^2 - \beta_1 z - \beta_0$. Comparer Q et P_A et justifier votre réponse.

c) On note M la matrice à 5 lignes et 4 colonnes dont la $j$ième ligne est constituée des coordonnées de $A^j x$ dans $\mathcal{B}$ pour $0 \leq j \leq 4$. Montrer qu'il existe un complexe C tel que

$$Q(z) = C \det \begin{pmatrix} & & 1 \\ & M & z \\ & & z^2 \\ & & z^3 \\ & & z^4 \end{pmatrix}$$

d) Application : x a pour coordonnées $(1,0,0,0)$ et A est la matrice définie au 4) ; déterminer le coefficient de z^2 dans Q.

Problème 2

PARTIE I

PRÉLIMINAIRE Soit a une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant $\forall x \in [0,1]$ $a(x) > 0$. Montrer que si une fonction $z \in C^0([0,1]) \cap C^2(]0,1[)$ vérifie

$$\begin{cases} -z''(x) + a(x)z(x) \geq 0 & \text{pour } x \in [0,1] \\ z(0) \geq 0 \\ z(1) \geq 0 \end{cases}$$

elle est positive ou nulle sur l'intervalle $[0,1]$.

On considère la fonction y solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad -y''(x) + (2-x)y(x) = 0$$

sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$. On ne demande pas de justifier l'existence d'une telle solution.

1) Montrer que y est positive ou nulle et convexe sur $[0,1]$.

2) Déterminer la fonction z_1 solution de $-z''(x) + 2z(x) = 0$, vérifiant $z_1(0) = 1$ et $z_1(1) = 0$.

3) A l'aide du préliminaire. justifier que $\forall x \in [0,1]\ \ y(x) \geq z_1(x)$.

4) En déduire un majorant de $y(x)$, puis de $|y'(x)|$ sur $[0,1]$.

5) Montrer que y est de classe C^4 sur $[0,1]$ et donner un majorant de $|y^{(iv)}(x)|$ sur $[0,1]$ ($y^{(iv)}$ désigne la dérivée quatrième de y).

6) Déterminer une fonction φ de sorte que $z = y + \varphi$ soit la solution de

$$(E') \qquad -z'' + (2-x)z(x) = b(x) \qquad \text{et} \quad z(0) = z(1) = 0$$

avec b à préciser.

PARTIE II

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$: on admettra que l'application

$$v \in \mathbb{R}^n \mapsto |v| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

où $|v_i|$ désigne la valeur absolue du réel v_i, définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
On dira qu'une matrice A $= (a_{i,j})$ (resp. un vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n)$) est *positive* si les coefficients $a_{i,j}$ (resp. les composantes v_i) sont tous positifs ou nuls. On pose

$$\|A\| = \sup\{|Av|; v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1\}$$

1) a) Montrer que: $|AX| \leq \|A\|\,|X|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.
b) Lorsque A est positive, exprimer simplement $\|A\|$.

2) Soit A une matrice carrée à n lignes et n colonnes. Montrer l'équivalence entre

- A est inversible et A^{-1} est positive.
- $\{v \in \mathbb{R}^n \mid Av \ \text{ positif}\} \subset \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \ \text{ positif}\}$

Une matrice vérifiant une de ces propriétés sera dite de type (M).

PARTIE III

PRÉLIMINAIRE: Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(a) + f(b) = 2f(c)$.

Soit a une fonction continue strictement positive sur $I = [0,1]$ et b une fonction continue sur I. On suppose que l'equation

$$(\mathcal{E}) \qquad -y''(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad y(0) = y(1) = 0$$

admet une solution w de classe C^4 sur I. (On ne demande pas de justifier cette existence.)
Etant donné un entier $n > 1$, on pose $h = \dfrac{1}{n+1}$ et on définit une subdivision de I en posant $x_i = ih$ pour $0 \leq i \leq n+1$. On notera

$$w_i = w(x_i) \quad a_i = a(x_i) \quad b_i = b(x_i)$$

1) a) Montrer qu'il existe des réels c_i, $|c_i| < 1$, tels que pour $1 \leq i \leq n$ on ait

$$-w''(x_i) = \frac{-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1}}{h^2} + \frac{h^2}{12} w^{(iv)}(x_i + c_i h).$$

b) Soit $A_h = (\alpha_{i,j})$ la matrice tridiagonale d'ordre n définie par

$$\begin{cases} \alpha_{i,j} = 2 + a_i h^2 & \text{si } i = j \\ \alpha_{i,j} = -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ \alpha_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$W_h = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \qquad b_h = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_h = -\frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} w^{(iv)}(x_1 + c_1 h) \\ w^{(iv)}(x_2 + c_2 h) \\ \vdots \\ w^{(iv)}(x_n + c_n h) \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\frac{1}{h^2} A_h W_h = b_h + \varepsilon_h$$

2) Soit $B_h = (\beta_{i,j})$ la matrice tridiagonale d'ordre n définie par

$$\begin{cases} \beta_{i,j} = 2 & \text{si } i = j \\ \beta_{i,j} = -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ \beta_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que B_h est de type (M). On pourra utiliser la deuxième propriété caractéristique.

b) Montrer qu'on peut résoudre le système

$$\frac{1}{h^2} B_h X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

en résolvant une équation différentielle.

c) Montrer que $\|B_h^{-1}\| \leqslant \frac{1}{8}$

3) a) Montrer que la matrice A_h est de type (M).

b) Montrer que

$$\|A_h^{-1}\| \leq \|B_h^{-1}\|$$

On pourra utiliser la relation $B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A - B)B^{-1}$.

4) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ la solution de $\frac{1}{h^2} A_h v = b_h$.

a) Montrer l'existence d'une constante K, telle que

$$\max_{1 \leq i \leq n} |w_i - v_i| \leq K h^2$$

b) Application : on considère l'équation (E') étudiée dans la partie I question 6 ; estimer K.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail